ММИ в алгебре

Метод математической индукции используется для доказательства справедливости утверждений, которые зависит от натурального параметра: 1) доказываем утверждение для нескольких начальных значений (база индукции); 2) предполагаем, что утверждение уже доказано для всех номеров не превосходящих k (предположение индукции); 3) доказываем, что верно и утверждение с номером $k+1$ (шаг индукции (вместе с п. 2)). Если третий пункт удался, то утверждение доказано по ММИ.

1. Известно, что $x_1 = 1$ и $x_{n+1} = 2x_n + 1$. Найдите явную формулу для вычисления элементов последовательности (x_n).
2. Докажите тождество $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.
3. Докажите тождество $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
4. Докажите `неравенство Бернулли`: $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$ при всех натуральных n и вещественных $x \geqslant -1$.
5. Докажите, что для любого $n \geqslant 3$ единицу можно представить в виде суммы n различных дробей с числителем, равным 1.
6. Докажите, что существуют арифметические прогрессии любой конечной длины, состоящие из степеней (больше первой) натуральных чисел.
7. Вещественное число x таково, что $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Докажите, что $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$ при всех натуральных n.
8. Докажите, что $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$.
9. Докажите, что $1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} < 2$.
10. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что $n \mid 2^n + 1$.
11. Докажите, что из любых 2047 натуральных чисел можно выбрать 1024 числа, сумма которых делится на 1024.
12. Для каждого натурального числа n вычислите сумму всех дробей вида $\frac{1}{xy}$, где x, y – взаимно простые числа такие, что $1 \leqslant x, y \leqslant n < x + y$.
13. Докажите неравенство $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} < \frac{17}{10}$.
14. Докажите, что $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{\ldots\sqrt{n}}}}} < 3$ для каждого натурального числа n.
15. Докажите `неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим`: $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ для любых неотрицательных вещественных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
16. Натуральные числа $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ таковы, что $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} = 1$. Докажите, что $a_n < 2^{n!}$.
17. Числовая последовательность $a_1, a_2, \ldots$ определена равенствами $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, а для всех $n \geqslant 3$: $a_n = -a_{n-1} - 2a_{n-2}$. Докажите, что при всех $n \geqslant 1$ число $2^{n+2} - 7a_n^2$ является полным квадратом.